数理解析研究所講究録
61巻 1968年 60-71

Closed Partitions of Maximal Ideal Spaces

山形大 理 富山 淳

§1. 序

Aを compact Hausdorff 空間X上の function algebra とし M_A をその maximal ideal の空間とする。M_A に(高々)可算ケの閉集合の covering $\{F_j\}$ が与えられたとき、Aの構造と、Aの各閉集合 F_j の上への制限 $A|F_j$ のそれとの間の関係について、最近 Gamelin と Wilken によって得られた結果(T. W. Gamelin & D.R. Wilken; Closed partitions of maximal ideal space)に筆者と石川弘氏(琉球大学)によって得られた結果をつけ加えたものが本稿である。尚後者の部分は R. Chalice によって同様なことが(もっと強い条件の下で) Amer. Math. Society の Notices (vol. 15 (1968),) に予告されており、和田淳蔵氏もほぼ同じ結果を独立に得られている。

以下Aの Šilov boundary を ∂A, Choque boundary を $B(A)$ とかき、XをAの表現空間と呼ぶことにする。

§2. Essential set と closed partition

一般にAをX上のfunction algebraとしたとき、Aに含まれるC(X)の最大idealのnullとなるXの閉集合をAのessential setという。Aのessential setは定義より表現空間Xに関係して定まるがその形は次のように非常にみやすい形で決定される。(以下の結果については富山[9]を参照)。

今 $$M_A = P \cup K_\alpha \cup K_\beta \cup \cdots\cdots$$

をM_Aの(Aに関する) maximal antisymmetric sets への分解とする。但しここでPは一点だけからなる antisymmetric set (maximal) 全体の集合で$K_\alpha, K_\beta \cdots$はその他のmaximal antisymmetric set (以下 m.a.s. と略記する) である。~~なお~~このような分解の型は表現空間に関係しないで定められる。即ちAの任意の表現空間Xに対して、XをM_Aの部分空間と考えたとき、

$$X = P \cup (K_\alpha \cap X) \cup (K_\beta \cup X) \cup \cdots$$

は又XのAによるm.a.s.への分解になっている。そこで各Xに共通に含まれるPの内核 int P をM_Aで考えると、これは又各X内でのPの内点の集合と一致し、XでのAのessential set E_Xは

$$E_X = X \sim \mathrm{int}\, P = (\mathrm{int}\, P)^c$$

と与えられる。従ってE_Xは

$$E_X = \overline{\bigcup_{\alpha}(K_\alpha \cap X)}$$

という風にも考えられる。ここで $K_\alpha \cap X$ は X でも一点だけでない m.a.s. になつていることはいうまでもない!!

int P を次の形で characterize することを考える。(Mullins [6] の一般の場合への拡張).

定理 1. (石川—富山—和田) M_A では次のことは同値である。 (1) $x \in \mathrm{int}\, P$

(2) x のある近傍が存在して $A| \overline{U(x)} = C(\overline{U(x)})$

補題 1. $x \in B(A)$ で且つ定理 1 の (2) の性質が成立すれば、 $x \in \mathrm{int}\, P$ である。

証明: x は Choquet boundary の点だから $U(x)$ に含まれる x の近傍 V と A の函数 f が存在して

$$f(x) = \|f\| = 1$$

且つ $M_A \sim V$ 上では $|f| < 1$ と出来る。 $M_A \sim V$ は compact だから定数 r があつて $M_A \sim V$ 上では

$$|f| \leqq r < 1.$$

次に $r < s < 1$ となる s をとり

$$V_0 = \{ y \in M_A \mid \mathrm{Re}\, f(y) > s \}$$

とおくと V_0 は x の近傍で V に含まれる。そこで Mergelyan

の定理を利用すれば $f(\overline{V_0}) \cup f(M_A \sim V)$ 上一様収束する多項式列 $\{p_n\}$ で

$$f(\overline{V_0}) \text{ 上} \qquad p_n(z) \longrightarrow 1$$

$$f(M_A \sim V) \text{ 上} \qquad p_n(z) \longrightarrow 0$$

となるものが存在する。一方 $A|\overline{V(x)} = C(\overline{V(x)})$ より A の中に函数 g が存在して

$$g(x) = 1 \quad \text{且つ} \quad g(V \sim V_0) = 0$$

と出来る。そこで $g(p_n \circ f)$ を考えるとつくり方からこれは M_A 上一様収束で、極限函数を h とすると $h \in A$,

$$h(x) = 1 \quad \text{且つ} \quad V_0 \text{の外で} \quad h \equiv 0.$$

A は $\overline{V(x)}$ 上では連続函数全体と一致するから、これから容易に x と他の点を区別する A の real な函数が構成出来る。即ち $x \in \operatorname{int} P$.

E を M_A の essential set とする。A の E 上への制限 $A|E$ は $C(E)$ で closed であることが知られており、これは E 上の function algebra と考えることが出来る。このとき

補題 2. P_1 を $A|E$ の一点よりなる m.a.s. の全体とすると、$\operatorname{int} P_1 = \phi$.

証明は $P_1 = E \cap P$ となること及び前出の E の構造定

理より殆んど明らかである.

定理1の証明 (1) ⇒ (2) は Bishop-Glicksberg の与えた m.a.s. への分解定理の結果 ([2], [4]) より容易に導びけるから (2) ⇒ (1) を示す. 今 $x \notin \partial A$ とすると, x の近傍 U で $U(x)$ に含まれ且つ $U \cap \partial A = \phi$ となるものが存在する。このとき local maximum modulus principle ([ ]) により

$$\partial \overline{A|\overline{U}} \subset \partial \overline{U}$$

しかるに $\partial(\overline{A|\overline{U}}) = \partial A|\overline{U} = \partial C(\overline{U}) = \overline{U}$

であるから矛盾である。よって $x \in \partial A$. 次に $U(x)$ に含まれる任意の x の近傍 V をとると, V は $B(A)$ の点を含み, $A|\overline{V} = C(\overline{V})$。よって補題1よりそれらの点はすべて P の内点である。従って $x \in \overline{\mathrm{int}\, P}$. 今 $x \in E$ とすると, x は E 内で (2) の条件をみたし, 且つ $M_{A|E} = E$。よって前の議論で

$$x \in \overline{\mathrm{int}\, P_1}$$

これは補題2に矛盾する. Q.E.D.

さて M_A に閉集合の可算個の covering $\{F_j\}$ が与えられたとする. 今各 $A|F_j$ は $C(F_j)$ で closed とすると function algebra $A|F_j$ の F_j での essential set E_j が与えられるが E は $\{E_j\}$ によって次のように決定される.

定理2 (石川一富山) $E = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j}$

証明. essential set の定義から E_j が E に含まれることは容易にわかる. よって $E \supset \overline{\bigcup_j E_j}$

今 $U = E \sim \overline{\bigcup_j E_j} \neq \phi$ とするとUは E の開集合で

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} (U \cap F_j)$$

よって category theorem からある番号 k が存在して $U \cap F_k$ は内点をもつ。これを x とすると $x \in F_k \sim E_k = P_k$ の内核。(但し P_k は $A|F_k$ の一点よりなる m.a.s. の全体の集合).

そこで x の近傍 V_1 を $\overline{V_1} \subset U \cap F_k$ ととると Bishop-Glicksberg の分解定理より $A|\overline{V_1} = C(\overline{V_1})$。これは定理1の結果に矛盾する.

系 (Gamelin, Wilken, 石川, 富山, 和田)

A を X 上の function algebra, $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$ を X の閉集合の cover とする。今 $A|F_j = C(F_j)$ $(j=1, 2, \cdots)$ ならば $A = C(X)$ である.

このときは $X = M_A$ となるから定理2より容易に結論が得られる.

§3 M_Aの閉集合のcoverから決定される函数とAとの間の関係.

AをX上のfunction algebra, EをXの閉集合としたとき、EのA−convex hull $\hat{E}$を

$$\hat{E} = \{\varphi \in M_A \mid \text{任意の } f \in A \text{ について } |\varphi(f)| \leq \|f\|_E\}$$

と定義する. $\hat{E}$は$\overline{A|E}$のmaximal ideal spaceである.

補題3 Uを∂Aの開集合とする. 今$f \in A$がU上で0になるとfはM_Aの開集合

$$V = M_A \sim (\widehat{\partial A \sim U})$$

上で0になる. 又 $V \cap U$はUでdenseである.

証明はGlicksberg [5]を参照

Function algebra AをM_A上で考えたとき、AとAにlocalに属する$C(M_A)$の函数fによって生成されたfunction algebra $[A, f]$のmaximal idealはM_Aと一致することが知られているが(Stolzenberg [8]) これはもっと一般に次のことが言える

定理3 (Gamelin−Wilken) $\{F_j\}$をM_Aの閉集合のcoveringとし$f \in C(M_A)$が$f|F_j \in A|F_j$をみたすとする。このとき $\partial[A, f] = \partial A$ 且つ $M_{[A,f]} = M_A$である.

証明. $\partial[A,f] \neq \partial A$ とする. Category theorem より $\partial[A,f] \sim \partial A$ 内に開集合 U が存在して、ある番号 k に対して $U \subset F_k$. F_k 上で f と一致する函数 f_k をとると U 上で $f-f_k$ は 0, よって補題3より $f-f_k$ は

$$V = M_{[A,f]} \sim \widehat{(\partial[A,f] \sim U)}$$

上で 0 となる. そこで

$$\pi \ ; \ M_{[A,f]} \longrightarrow M_A$$

を自然に導びかれた projection map とすると、$[A,f]|V \subset \overline{A|V}$ であるから $\pi|V$ は1対1である. さて今

$$\partial[A,f] \cap (V \sim \partial A) \neq \phi$$

とする. $x_0 \in \partial[A,f] \cap (V \sim \partial A)$ とその閉近傍 U_0 を $V \sim \partial A$ に入るようにとる. このとき π は又 U_0 上で1対1連続になるから homeomorph である. よって U_0 を $M_{[A,f]}$, M_A の両方の中で考えると

$$\partial([A,f]|U_0) \subseteq \partial(\overline{A|U_0}) \subseteq (U_0 \cap \partial A) \cup \partial U_0 = \partial U_0$$

(最後の $\subseteq$ は Rossi [7] の local maximum modulus principle による) これは

$$x_0 \in \partial[A,f] \cap \mathrm{int}(U_0) \subseteq \partial([A,f]|U_0)$$

に矛盾する. よって $\partial[A,f] \cap (V \sim \partial A) = \phi$. しかしこれは補題3の最後の部分に矛盾する. 従って $\partial[A,f] = \partial A$.

次に $\hat{g}$ を $[A,f]$ の Gelfand 表現函数とすると、任意の $g \in A$ は

$\hat{g} = g\circ\pi$ とかける。そこで $f\circ\pi$ を考えると

$$f\circ\pi \,|\, \pi^{-1}(F_j) \in [A,\hat{f}] \,|\, \pi^{-1}(F_j) \quad (j=1,2,\cdots).$$

今 $M_{[A,f]}$ 上で $[A,\hat{f}]$, $[A,\hat{f}, f\circ\pi]$ という function algebra に前のことを適用すると

$$\partial[A,\hat{f}, f\circ\pi] = \partial[A,\hat{f}] = \partial A.$$

よって $\hat{f} - f\circ\pi$ は $\partial[A,\hat{f},f\circ\pi]$ 上で 0, 従って $M_{[A,\hat{f},f\circ\pi]}$ 上で $\hat{f} \equiv f\circ\pi$。よって $\hat{f}$ は各 fibre $\pi^{-1}(x)$ 上で定数となり π は1対1写像であることがわかる。即ち $M_{[A,f]} = M_A$.

上の定理の仮定を $f|F_j \in \overline{A|F_j}$ とゆるめたときは、covering が2ケの閉集合でつくられたとき

定理4. $\{F_1,F_2\}$ を M_A の閉集合の cover. 今 $f\in C(M_A)$ が $f|F_j \in \overline{A|F_j}$ で且つある表現空間 X 上で A の函数 g と等しいとすると、M_A 上でも $f\equiv g$ である。i.e. $f\in A$.

証明. $X=\partial A$, $f|\partial A = 0$ として一般性を失なわない。更に $E = M_A \sim \mathrm{int}(f^{-1}(0))$, $B = \overline{A|\hat{E}}$ とおくと、local maximum modulus principle から

$$\partial B \subseteq \partial A \cup \partial \hat{E}.$$

しかるに $f|\partial\hat{E} = 0$ だから $f|\partial B = 0$. そこで A を B, F_j を $F_j\cap E$ でおきかえると、$f|\hat{E}=0$ が言えればよいのだから、

$$M_A = A\text{-convex hull of } \{f \neq 0\}$$

としてよい。次に $\partial A \cap \mathrm{int}\, F_2 \subseteq \partial \overline{A|F_2} \subseteq (F_2 \cap \partial A) \cup \partial F_2$ より $f | \partial A \cap \mathrm{int}\, F_2 = 0$. よって補題3より f は

$$V = \hat{F}_2 \sim \widehat{(\partial \overline{A|F_2} \sim (\partial A \cap \mathrm{int}\, F_2))}$$

上で0となる。ここで

$$\partial \overline{A|F_2} \sim (\partial A \cap \mathrm{int}\, F_2) \subseteq \partial F_2$$

であるから $f | \hat{F}_2 \sim \widehat{\partial F_2} = 0$。 $\widehat{\partial F_2} \subset \hat{F}_1$ であるから

$$f | \hat{F}_2 \sim \hat{F}_1 = 0, \text{ ゆえに } f | F_2 \sim \hat{F}_1 = 0.$$

従って f の support は $\hat{F}_1$ に含まれ、$M_A = \hat{F}_1$ となる。これから $\partial A \subseteq F_1$。そこで $\{f_n\} \subset A$ を F_1 上 f に一様収束するようにとると、∂A 上でも $f|\partial A = 0$ に一様収束。よって $\{f_n\}$ は M_A 上で0に一様収束する。従って特に $f|F_1 = 0$, ゆえに $f \equiv 0$ となる。

定理5. $\{F_1, F_2\}$ を M_A の closed cover, $f \in C(M_A)$ は $f|F_j \in \overline{A|F_j}$ となる函数とする。このとき $M_{[A,f]} = M_A$ である。

証明。定理3の証明の後半の方法で

$$\pi : M_{[A,f]} \longrightarrow M_A$$

を前と同様にとると、$f\circ\pi$ は $\pi^{-1}(F_j)$ 上 $[A,f]$ の函数で一様近似出来る。しかも $M_A (\supset \partial[A,f])$ 上では $\hat{f} = f\circ\pi$. 従

って前定理から $M_{[A,f]}$ 上で $\hat{f} \equiv f\circ\pi$ が言え、π が1対1になることから $M_{[A,f]} = M_A$ を得る。

Gamelin－Wilken の論文にはこのあと定理5では必ずしも $\partial[A,f] = \partial A$ とはならないこと及び定理4と5は3ヶの閉集合の cover には拡張出来ないことの例が disk algebra を使って示されているが詳細は略する。

文献

[1] H. S. Bear, Complex function algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 90 (1959), 383～392.

[2] E. Bishop, A generalization of the Stone-Weierstraß theorem, Pacific J. Math., 11 (1961), 777－783.

[3] R. Chalice, On the essential set of function algebras, Notices of Amer. Math. Soc. 15 (1968), abstract.

[4] I. Glicksberg, Measures orthogonal to algebras of continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962), 415-435.

[5] ―――――, Maximal algebras and a theorem of Rado, Pacific J. Math., 14 (1964), 919～941.

[6] R. Mullins, The essential set of function algebras

Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 271~273.

[7] H. Rossi, The local maximum modulus principle, Ann. of Math., 72 (1960), 1~11

[8] G. Stolzenberg, The maximal ideal space of the functions locally in a function algebra, Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963), 342~345

[9] J. Tomiyama, Some remarks on antisymmetric decompositions of function algebras, Tôhoku Math. J. 16 (1964), 340~344.

[10] D. Wilken, Maximal ideal spaces and A-convexity, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 1357~1362.